КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к зачету.

1. Какую систему обыкновенных дифференциальных уравнений называют автономной?

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной или динамической, если независимое переменное явно не входит в систему.

Общий вид автономной системы из n уравнений в нормальной форме следующий:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

или подробнее

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \; i = 1, \dots, n.$$

2. Какова связь между фазовой траекторией автономной системы и соответствующей интегральной кривой этой системы?

Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t),\; t \in (t_1, t_2)$ есть решение автономной системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$, тогда множество точек $\{\vec{x} \in R^n | \vec{x} = \vec{\varphi}(t),\; t \in (t_1, t_2)\}$ является кривой в пространстве R^n. Эту кривую называют фазовой траекторией, а пространство R^n, в котором расположены фазовые траектории – фазовым пространством автономной системы. Интегральные кривые системы изображаются в $(n+1)$-мерном пространстве R^{n+1} с координатами $(t, x_1, \dots, x_n)$. Соответствующая фазовая траектория является проекцией интегральной кривой на фазовое пространство, параллельной оси t.

3. Рассмотрим автономную систему из n уравнений $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$, для которой выполнены условия основной теоремы существования и единственности решения. Пусть $u(\vec{x})$ функция, заданная в фазовом пространстве этой системы и непрерывно дифференцируемая там. Дать определение производной этой функции в силу автономной системы.

Производная функции $u(\vec{x})$ определяется равенством

$$\dot{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) = (\nabla u(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})),$$

где $\nabla u(\vec{x}) = (\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_n})$ – градиент функции $u(\vec{x})$. Производная в силу системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ называется также производной по направлению векторного поля $\vec{f}(\vec{x})$ или производной Ли.

4. Пусть $\dot{u}(\vec{x})$ -- производная в силу системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ и $\dot{u}(\vec{x}) \geq 0$ $(\dot{u}(\vec{x}) \leq 0)$ в некоторой области фазового пространства D. Тогда функция $u(\vec{x})$ не убывает (не возрастает) вдоль любой фазовой траектории системы, лежащей в области D. Как называют функцию $u(\vec{x})$, если ее производная в силу системы тождественно равна нулю?

Функция $u(\vec{x})$ называется первым интегралом автономной системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$, если эта функция постоянна вдоль каждой траектории этой системы. Таким образом, если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ – решение системы, то функция $u\big(\vec{\varphi}(t)\big) = const$ при всех t. Для того, чтобы функция $u(\vec{x})$ была первым интегралом системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная в силу этой системы была равна нулю: $\dot{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) = (\nabla u(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})) = 0.$

5. Дать определение устойчивости по Ляпунову положения равновесия автономной системы.

Рассмотрим автономную систему из n уравнений $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$. Обозначим $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ решение этой системы с начальными данными $\vec{x}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$.

Положение равновесия $\vec{a}$ называется устойчивым по Ляпунову, если:

- существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $|\vec{x}_0 - \vec{a}| < \delta_0$, то решение $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ существует при $0 \leq t < \infty$;

- для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $|\vec{x}_0 - \vec{a}| < \delta$, то $|\vec{x}(t, \vec{x}_0) - \vec{a}| < \varepsilon$ при всех $t \in [0, \infty)$.

Это означает, что если в начальный момент времени изображающая точка находится достаточно близко к положению равновесия, то и во все последующие моменты времени, двигаясь по траектории, точка будет оставаться в близи положения равновесия.

6. Дать определение асимптотической устойчивости положения равновесия автономной системы.

Положение равновесия $\vec{a}$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и если $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{x}(t, \vec{x}_0) = \vec{a}$ при достаточно малых $|\vec{x}_0 - \vec{a}|$.

Это означает, что если точку немного сдвинуть их положения равновесия, то она с ростом времени будет стремиться вернуться в положение равновесия.

7. Пусть автономная система $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ имеет положение равновесия $\vec{a}$, т. е. $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$. Каким образом можно заменой переменной свести исследование устойчивости положения равно-весия этой системы к исследованию устой-чивости начала координат другой системы, которую называют приведенной или, следуя Ляпунову, системой уравнений возмущенного движения.

Выполним замену переменной $\vec{y} = \vec{x} - \vec{a}$, где $\vec{y}$ отклонение фазового вектора $\vec{x}$ от положения равновесия $\vec{a}$. В новых переменных уравнение будет иметь вид $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{a} + \vec{y})$ и будет иметь положение равновесия $\vec{y} \equiv \vec{0}$, соответствующее положению равновесия $\vec{a}$ исходной системы. При исследовании устойчивости положения равновесия $\vec{a}$ его называют невозмущенным движением, вектор $\vec{y} = \vec{x} - \vec{a}$ называют возмущением, а уравнение $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{a} + \vec{y})$ – уравнением возмущенного движения.

8. При исследовании устойчивости положения равновесия автономной системы прямым методом Ляпунова рассматривают некоторые функции, не зависящие от времени, определенные в некоторой окрестности положения равновесия $\vec{y} \equiv \vec{0}$ приведенной системы и обладающие непрерывными частными производными. В каких случаях такие функции называют знакоопределенными? В каких случаях такие функции называют знакопостоянными? В каких случаях такие функции называют знакопеременными?

Функция $V(\vec{y})$ называется знакоопределенной (определенно-положительной или определенно отрицательной), если она при $\| \vec{y} \| \leq h$, где h -- достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определенного знака и обращаться в нуль только при $\vec{y} = \vec{0}$.

Функция $V(\vec{y})$ называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она при $\| \vec{y} \| \leq h$, где h -- достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в нуль и при $\vec{y} \neq \vec{0}$.

Функция $V(\vec{y})$ называется знакопеременной, если в любой, сколь угодно малой, окрестности начала координат принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например, функция $V(y_1, y_2) = {y_1}^2 + {y_2}^2$ -- определенно-положительная, а функция $V(y_1, y_2) = (y_1 - y_2)^2$ -- положительна.

***9.* Доказать знакоопределенность функции $V(y_1, y_2) = 1 + \sin^2 y_1 - \cos(y_1 - y_2)$.**

Разложим функцию $V(y_1, y_2)$ в ряд в окрестности начала координат. Так как $\sin^2 y_1 = {y_1}^2 + \ldots$ и $\cos(y_1 - y_2) = 1 - \frac{1(y_1 - y_2)^2}{2} + \cdots$, то $V(y_1, y_2) = 1 - {y_1}^2 - 1 + \frac{1(y_1 - y_2)^2}{2} + \cdots$

Таким образом

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(3y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}(y_1, y_2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \ldots$$

Применим критерий Сильвестра для определения положительной определенности квадратичной формы в разложении функции $V(y_1, y_2)$.

Для того чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ матрицы ее коэффициентов были положительны.

В нашем случае $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ и согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $\frac{1}{2}(3{y_1}^2 - 2y_1y_2 + {y_2}^2)$ – определенно-положительна.

Отсюда заключаем, что функция $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(3{y_1}^2 - 2y_1y_2 + {y_2}^2) + \cdots$ в малой окрестности начала координат определенно-положительна.

10. Сформулировать теорему Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения и применить ее для исследования устойчивости положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 3{y_2}^2, \\ \dot{y}_2 = -y_1y_2 - {y_2}^3. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова взять функцию

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}({y_1}^2 + {y_2}^2).$$

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы знакопостоянной противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Найдем производную функции $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}({y_1}^2 + {y_2}^2)$ в силу системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 3{y_2}^2, \\ \dot{y}_2 = -y_1y_2 - {y_2}^3. \end{cases}$$

$$\dot{V} = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 =$$
$$= y_1\left(-y_1 + 3{y_2}^2\right) + y_2\left(-y_1y_2 - {y_2}^3\right) =$$
$$= -(y_1 - {y_2}^2)^2.$$

Функция V – определенно-положительна, а ее производная $\dot{V}$ – отрицательная функция. На основании теоремы Ляпунова можно утверждать, что невозмущенное движение $\vec{y} \equiv \vec{0}$ устойчиво.

11. Сформулировать теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости невозмущенного движения и применить ее для исследования устойчивости положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 + y_1y_2 - {y_1}^3 - \frac{1}{2}y_1{y_2}^2, \\ \dot{y}_2 = -3y_2 + y_1y_2 + {y_1}^2y_2 - \frac{1}{2}y_1{y_2}^2. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова взять функцию

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(3{y_1}^2 - 2y_1y_2 + {y_2}^2).$$

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Квадратичная форма

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(3y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(y_1, y_2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

определенно-положительна. Это было установлено по критерию Сильвестра в ответе на вопрос с номером 9. Производная этой формы в силу системы имеет вид

$$\dot{V} = -3y_1^4 + 2y_1^2y_2 - 2y_2^2 = \left(y_1^2, y_2\right)\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2 \end{pmatrix}..$$

Для того чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ матрицы ее коэффициентов последовательно меняли свой знак:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n\Delta_n > 0.$$

В нашем случае $\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 5 > 0$, т. е. $\dot{V}$ – определенно-отрицательная функция относительно ${y_1}^2$ и y_2, следовательно, и относительно y_1 и y_2.

Функция V -- определенно-положительна, а ее производная $\dot{V}$ – определенно-отрицательная функция. На основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости можно утверждать, что невозмущенное движение $\vec{y} \equiv \vec{0}$ асимптотически устойчиво.

12. Сформулировать теорему Ляпунова о неустойчивости движения и применить ее к доказательству неустойчивости положения

равновесия уравнения $\frac{dy}{dt}=y$, выбрав в качестве функции Ляпунова $V(y)=\frac{1}{2}y^2$.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию V, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной $\dot{V}$ и могла бы принимать в окрестности нуля значения одного знака с $\dot{V}$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Производная функции $V(y)=\frac{1}{2}y^2$ в силу уравнения $\frac{dy}{dt}=y$ положительно-определена $\dot{V}=y^2$. Сама функция $V(y)$ принимает положительные значения в сколь угодно малой окрестности положения равновесия (она – положительно определена). Следовательно, положение равновесия $y\equiv 0$ является неустойчивым.

13. Рассмотрим линейную автономную систему из n уравнений $\frac{d\vec{y}}{dt}=A\vec{y}$. Эта система имеет положение равновесия $\vec{y}\equiv\vec{0}$. Так как такая система интегрируется, вопрос об устойчивости этого положения равновесия полностью исследован. Сформулировать необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия этой системы.

Положение равновесия $\vec{y}\equiv\vec{0}$ системы $\frac{d\vec{y}}{dt}=A\vec{y}$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны.

14. Выше мы говорили об устойчивости положения равновесия автономной системы. Рассмотрим произвольное решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ $(a<t<\infty)$ системы дифференци-альных уравнений $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$. Дать определение устойчивости этого решения по Ляпунову.

Решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ $(a<t<\infty)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $\varepsilon>0$ и $t_0\in(a,\infty)$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ такое, что

- все решения $\vec{x}=\vec{x}(t)$ системы $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$, удовлетворяющие условию $\|\vec{x}(t_0)-\vec{\varphi}(t_0)\|<\delta$, определены в промежутке $[t_0,\infty)$;
- для этих решений справедливо неравенство $\|\vec{x}(t)-\vec{\varphi}(t)\|<\varepsilon$ при $t\in[t_0,\infty)$.

15. Дать определение асимптотической устойчивости решения системы дифференциальных уравнений.

Решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ $(a<t<\infty)$ называется асимптотически устойчивым при $t\to+\infty$, если

- это решение устойчиво по Ляпунову
- для любого t_0 существует $\Delta=\Delta(t_0)>0$

такое, что из неравенства $\|\vec{x}(t_0)-\vec{\varphi}(t_0)\|<\Delta$ следует $\lim_{t\to\infty}\|\vec{x}(t)-\vec{\varphi}(t)\|=0$.

Если решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ $(a<t<\infty)$ системы $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$ с непрерывной правой частью устойчиво для какого-нибудь фиксированного момента времени $t_0\in(a,\infty)$, то оно будет устойчивым для любого другого момента, т. е. будет устойчивым в смысле данного выше определения. Таким образом можно ограничиваться проверкой устойчивости решения лишь для некоторого начального момента t_0.

16. Понятие приведенной системы или системы уравнений возмущенного движения применяется не только при исследовании устойчивости положения равновесия автономной системы, но и при исследовании устойчивости произвольного решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ $(a<t<\infty)$ системы дифференци-альных уравнений $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$. Дать определение приведенной системы.

Пусть $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ $(a<t<\infty)$ решение системы $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$, устойчивость которого требуется исследовать (невозмущенное движение). Положим $\vec{y}=\vec{x}-\vec{\varphi}(t)$, т. е. $\vec{y}$ есть отклонение решения $\vec{x}(t)$ от решения $\vec{\varphi}(t)$. Так как

$$\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt}=\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t)),$$

то для для $\vec{y}$ получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\vec{y}}=\dot{\vec{x}}-\dot{\vec{\varphi}}(t)=\vec{f}\big(t,\vec{y}+\vec{\varphi}(t)\big)-\vec{f}\big(t,\vec{\varphi}(t)\big)=\vec{Y}(t,\vec{y}).$$

Так как $\vec{Y}(t,\vec{0}) \equiv \vec{0}$, система $\dot{\vec{y}} = \vec{Y}(t,\vec{y})$ имеет тривиальное решение $\vec{y} \equiv \vec{0}$, которое соответствует исходному $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ (невозмущенному движению). Систему уравнений $\dot{\vec{y}} = \vec{Y}(t,\vec{y})$ называют приведенной или системой уравнений возмущенного движения.

17. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t),\ A(t),\vec{b}(t) \in C(0,\infty).$$

Показать, что все ее решения либо устойчивы, либо неустойчивы.

Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ $(a < t < \infty)$ решение системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t),$$

устойчивость которого требуется исследовать (невозмущенное движение). Положим $\vec{y} = \vec{x} - \vec{\varphi}(t)$, т. е. $\vec{y}$ есть отклонение решения $\vec{x}(t)$ от решения $\vec{\varphi}(t)$. Тогда

$$\dot{\vec{y}} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{\varphi}}(t) = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) - A(t)x\vec{\varphi}(t) - \vec{b}(t) = A(t)\vec{y}\,.$$

Приведенное уравнение имеет вид $\dot{\vec{y}} = A(t)\vec{y}$. Если положение равновесия этой однородной линейной системы устойчиво, то любое решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ исходной системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$ устойчиво. Линейную систему называют устойчивой, если все ее решения устойчивы.

18. Найти решение задачи Коши

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{x},\ \ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Исследовать устойчивость этого решения.

Найдем собственные значения матрицы системы. Они являются корнями характеристического полинома

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+4)+2 =$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3).$$

Собственные числа $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -3$ отрицательны. Следовательно, любое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = -2$, является решением алгебраической системы $(A - \lambda_1 E)\vec{h} = 0$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно взять ненулевое решение $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = -3$, является решением алгебраической системы $(A - \lambda_1 E)\vec{g} = 0$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно взять ненулевое решение $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Построим неособенную матрицу

$$S = \{\vec{h}, \vec{g}\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдем обратную к ней

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение начальной задачи можно теперь подсчитать следующим образом:

$$\vec{x}(t) = S\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}S^{-1}\vec{x}(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-3t}.$$